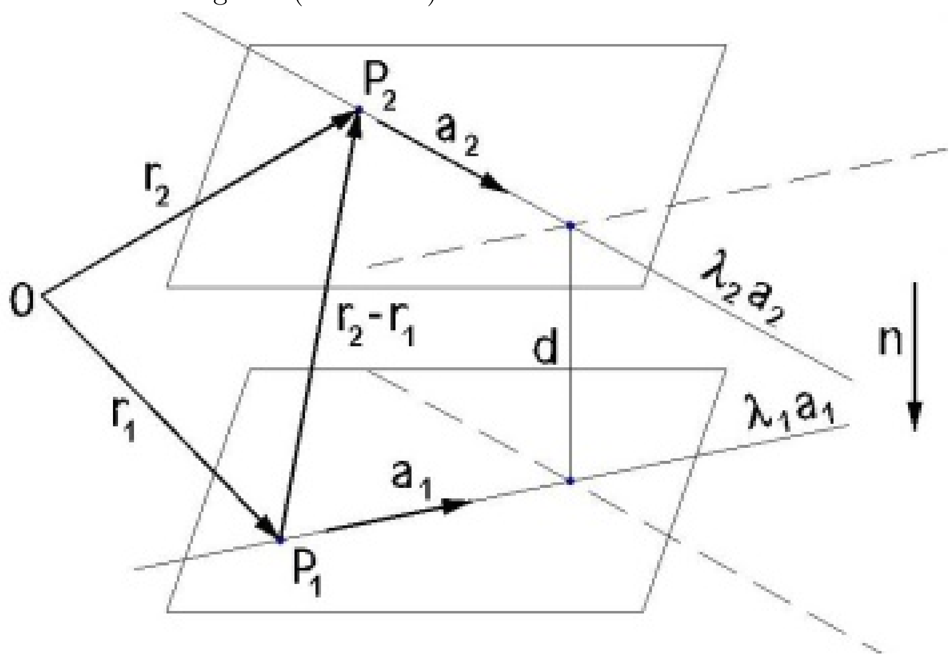
Fünfundzwanzigste Woche, 14. Dezember,

0.0.1 Abstand zweier windschiefer Geraden

Wir betrachten zwei Geraden $\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1$ und $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$, die weder parallel zueinander sind, noch sich kreuzen. Durch sie läßt sich keine Ebene legen. Man nennt zwei solche Geraden windschief.

Als Winkel zwischen solchen Geraden bezeichnet man den Winkel zwischen zwei zu ihnen parallelen Geraden, die einen gemeinsamen Punkt haben.

Abbildung 0.1: (Kürzester) Abstand zweier windschiefer Geraden



Als Abstand zweier windschiefer Geraden bezeichnet man deren kürzesten Abstand. Der ist gegeben durch zwei bestimmte Punkte, einer auf jeder Geraden. Sie definieren eine Strecke von der Länge d, bzw. einen Verbindungsvektor $\mathbf{d}$, mit $\|\mathbf{d}\| = d$, der auf beiden Geraden senkrecht steht. Der Vektor $\mathbf{d}$ ist parallel zum Lotvektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2.$$

Anders ausgedrückt: es gibt zwar keine Ebene die beide Geraden enthält, aber es gibt eine Schar (unendlich viele) von Ebenen, die zu beiden Geraden parallel sind. Zwei dieser Ebenen sind dadurch ausgezeichnet, daß die eine jeweils eine der Geraden enthält und zur anderen Geraden parallel ist. Für diese Ebenen ist $\mathbf{n}$ ein Normalvektor (siehe Abb. 0.1) und sie haben den Abstand d.

Schiebt man die eine Gerade entlang $\mathbf{d}$ bzw. $-\mathbf{d}$ in die jeweils andere Ebene, dann wird diese von den zwei Geraden aufgespannt.

Wählen wir je einen beliebigen Punkt auf jeder Ebene, z. B. P_3 und P_4 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_3$ und $\mathbf{r}_4$, dann hat deren Verbindungsvektor $\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3$ immer die konstante Komponente $\mathbf{d}$, mit $\|\mathbf{d}\| = d$, in Richtung des Vektors $\mathbf{n}$, d. h. $(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3)_{\mathbf{n}} = \mathbf{d}$, also insbesondere auch $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)_{\mathbf{n}} = \mathbf{d}$.

Da $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{d}$, ergibt sich, da $\mathbf{d} \parallel \mathbf{n}$, $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \pm\|\mathbf{n}\|\cdot\|\mathbf{d}\|$, oder anders ausgedrückt, $\|\mathbf{d}\| = d = \|\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{n}\|}\|$ bzw., da $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ und da für $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ auch die Schreibweise $\mathbf{n}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ zulässig ist, erhält man den kürzesten Abstand zweier windschiefer Geraden $\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}_1 + \lambda_1\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_2 + \lambda_2\mathbf{a}_2$ als

$$d = \|\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}\|. \tag{0.1}$$