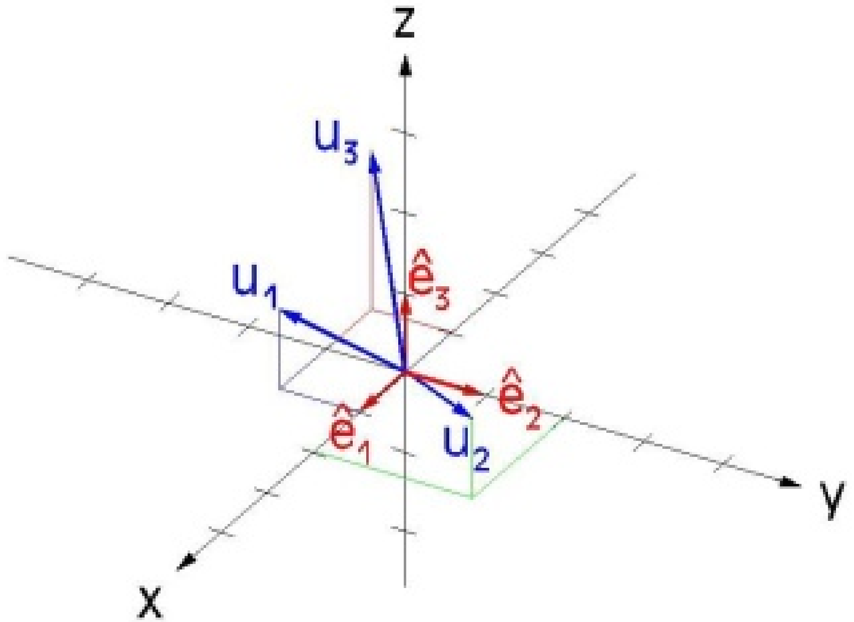
Vierzehnte Woche, 29. Juni,

0.1 Wechsel der Basis in R^3

0.1.1 Beliebige Basen

In einem kartesischen Koordinatensystem betrachten wir zwei Basen für $\mathbf{R}^3$ (siehe Abb. 0.1); die Standardbasis $B = (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ und eine nicht-orthonormale Basis $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = ((1, -1, 1), (2, 2, 1), (-1, -1, 2))$.

Abbildung 0.1: Wechsel der Basis



Die Matrix $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, also $(1, -1, 1), (2, 2, 1), (-1, -1, 2)$ der Basis C (relativ zur Basis B) sind, ist die *Basistransformationsmatrix* von C nach B.

Sind die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$ zur Basis C, also $(\mathbf{v})_C$, gegeben, erhält man $(\mathbf{v})_B$ durch

$$(\mathbf{v})_B = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{v})_C \tag{0.1}$$

Das geht hier deshalb so glatt, da die Elemente der Basis C relativ zu den Elementen der Basis B vorliegen. Haben wir zwei beliebige, nicht orthonormale Basen, muß man erst die Elemente der einen Basis durch die der anderen Basis ausdrücken. Wir wollen deshalb hier den allgemeinen Weg wählen und dafür die Elemente der Standardbasis B relativ zur Basis C finden.

Für jedes $\hat{\mathbf{e}}_i$ müssen wir das linieare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \hat{\mathbf{e}}_i$ lösen. Wir wenden hier das Verfahren der Gauss'schen Elimination an, wie im Kapitel *lineare Gleichungssysteme* beschrieben, erweitern die Matrix aber gleich um alle drei $\hat{\mathbf{e}}_i$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \stackrel{(1\&2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(3)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \stackrel{(4)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(5)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{array}\right] \stackrel{(6\&7)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(8)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{10} & -\frac{5}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{array}\right]$$

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_2 \to Z_2 + Z_1$,

(2) $Z_3 \to Z_3 - Z_1$,

(3) $Z_2 \to \frac{1}{4} Z_2$,

(4) $Z_3 \to Z_3 + Z_2$,

(5) $Z_3 \to \frac{4}{10} Z_3$,

(6) $Z_1 \to Z_1 + Z_3$,

(7) $Z_2 \to Z_2 + \frac{2}{4} Z_3$,

(8) $Z_1 \to Z_1 - 2Z_2$,

Die rechten Spalten der umgeformten erweiterten Matrix enthalten die Koordinaten der drei $\hat{\mathbf{e}}_i$ relativ zur Basis C. Diese drei Spaltenvektoren bilden deshalb die *Basistransformationsmatrix* von B nach C. Diese Matrix ist aber nichts anderes als die Inverse von $\mathbf{A}^{-1}$, da wir in unserer Suche nach den $\hat{\mathbf{e}}_i$ zur Basis C, de facto $\mathbf{A}^{-1}$ invertiert haben.

Sind die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$ zur Basis B, also $(\mathbf{v})_B$, gegeben, erhält man $(\mathbf{v})_C$ durch

$$(\mathbf{v})_C = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v})_B \tag{0.2}$$

0.2 Übungen

1. In dem kartesischen Koordinatensystem in Abb. 0.1 sei der Punkt $(10, 10, 10)$ gegeben. Man stelle ihn als Vektor zur Basis B dar.

2. Denselben Punkt stelle man als Vektor zur Basis C dar.