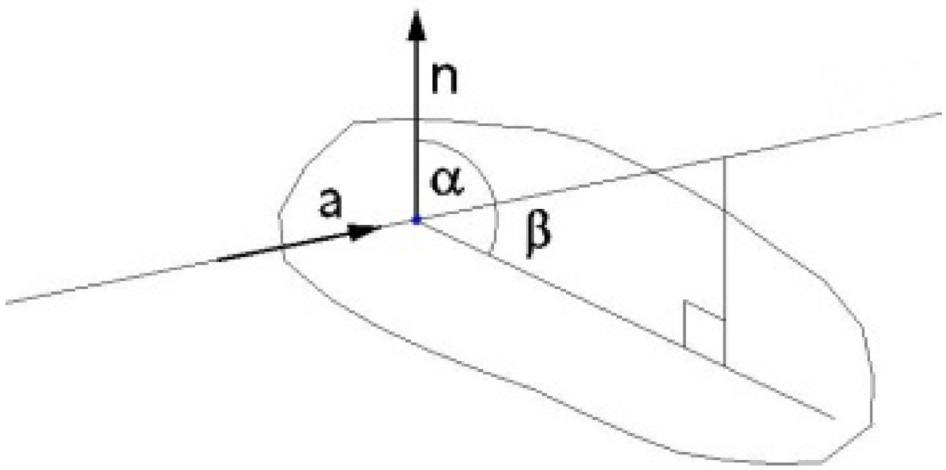
0.1 Weitere Anwendungen

0.1.1 Winkel einer Geraden zu einer Ebene

Wir betrachten eine Gerade $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}$ und eine Ebene $\mathbf{nr} = \mathbf{nr}_0$.

Abbildung 0.1: Winkel einer Geraden zu einer Ebene



Wir denken uns den Anfangspunkt des Normalenvektors $\mathbf{n}$ im Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene. Für den Neigungswinkel β und seinen Komplementärwinkel α gilt dann $\cos\alpha = \sin\beta$.

Das Skalarprodukt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{n}\| \ \|\mathbf{a}\| \cos\alpha$ liefert $\sin\beta = \cos\alpha = \|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{n}\| \ \|\mathbf{a}\|}\|$.
Damit ist der Neigungswinkel

$$\beta = \arcsin \|\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{n}\| \ \|\mathbf{a}\|}\|. \tag{0.1}$$

0.1.2 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Wir betrachten eine Gerade $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}$ und einen Punkt P_1 der nicht auf der Geraden liegt. P sei der Fußpunkt des Lotes von P_1 auf $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}$ (siehe Abb. 0.2) und λ_0 sei der Wert des Parameters λ, der P bzw. $\mathbf{r}$ entspricht.

Wir haben somit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda_0\mathbf{a}$
aber auch $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$, wobei $\mathbf{d}$ der Vektor ist, dessen Länge dem gesuchten Abstand d entspricht.

Woraus folgt,

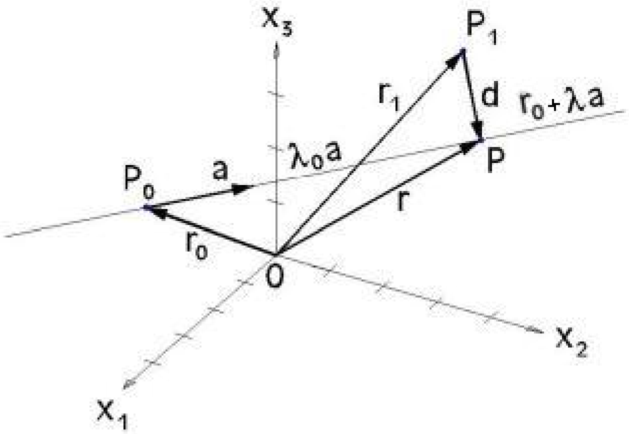
$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{d} = \mathbf{r}_0 + \lambda_0 \mathbf{a}. \tag{0.2}$$

Ferner haben wir noch das Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = 0. \tag{0.3}$$

Aus Gleichung 0.2 erhalten wir durch skalare Multiplikation mit $\mathbf{a}$,

Abbildung 0.2: Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden $\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a}$



$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} \cdot \lambda_0 \mathbf{a}$,
oder
$\mathbf{a}\mathbf{r}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{a}\mathbf{r}_0 + \lambda_0 \mathbf{a}^2$.

Daraus erhalten wir den Parameter λ_0 für den Fußpunkt P als
$\lambda_0 = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{a}^2}$.

Einsetzen von λ_0 in 0.2 ergibt
$\mathbf{d} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}$.

Der gesuchte Abstand des Punktes von der Geraden ergibt sich somit als

$$d = \|\mathbf{d}\| = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}\|. \tag{0.4}$$

Man überlege sich gut, warum in dieser Gleichung nichts "gekürzt" werden darf.