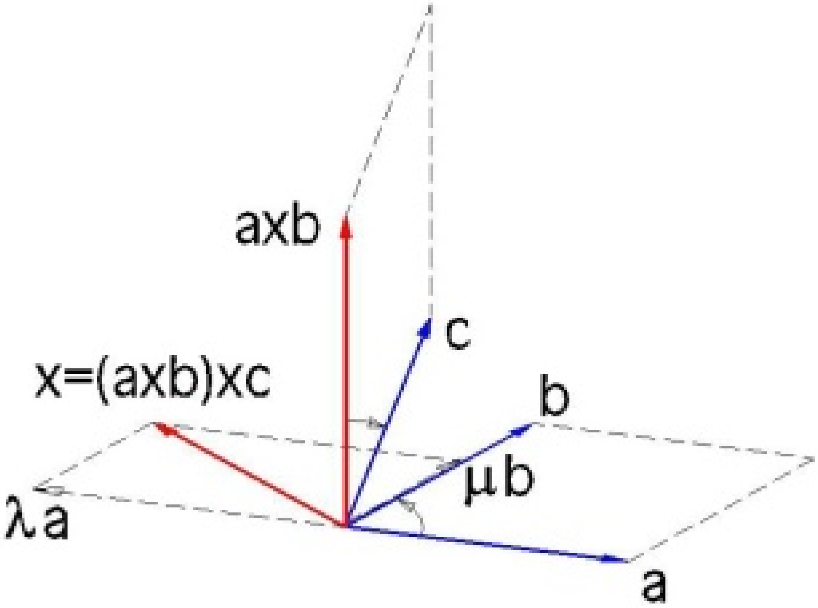
Zwanzigste Woche, 9. November,

0.1 Das dreifache Vektorprodukt

Für drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, in der Reihenfolge, gibt es zwei *dreifache Vektorprodukte*: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ und $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Nehmen wir das Erstere. Der Vektor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ steht senkrecht auf der Ebene von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Der Vektor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ steht senkrecht auf der Ebene

Abbildung 0.1: Das dreifache Vektorprodukt



von $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ und $\mathbf{c}$ und liegt damit wieder in der Ebene von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, wie Abb. 0.1 veranschaulicht. Dass $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig sind, geht auch aus der Identitäten 0.1 hervor, da $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ und $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ Skalare sind.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \tag{0.1}$$

Setzt man $\lambda = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ und $\mu = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$, wird 0.1 zu $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

Da $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \perp \mathbf{c}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ und $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, ergeben die entsprechenden Skalarprodukte null. Also $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$, $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = 0$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ und $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$.

Die 0.1 entsprechende Identität für $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ lautet

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{0.2}$$

Um diese Identitäten einzusehen, rechnen wir 0.2 einfach aus. Wer sich die Arbeit etwas leichter machen will, kann, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, ein kartesiches Koordinatensystem wählen, in welchem **a** oder **b** parallel zu Ox oder Oy liegt.

Wählen wir ganz allgemein $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ und $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, dann haben wir

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3,\ -b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1) \text{ und}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_2c_3 & -b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$
$$= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1,\ -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1,\ -a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3).$$

Andererseits ist auch

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\mathbf{b} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\mathbf{c}$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2)(b_1, b_2, 0) - (a_1b_1 + a_2b_2)(c_1, c_2, c_3)$$

$$= (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2,\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2,\ 0) - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1,\ a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2,\ a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3)$$

$$= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1,\ a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2,\ -a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3).$$