Fünfzehnte Woche, 5. Oktober, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Besprechung der Übungen

1. Da die Elemente der Basis B mit dem kartesischen Koordinatensystem in Abb. **??** synchron sind, entspricht dem Punkt $(10, 10, 10)$ der Vektor $(\mathbf{v})_B = 10\hat{\mathbf{e}}_1 + 10\hat{\mathbf{e}}_2 + 10\hat{\mathbf{e}}_3 = (10, 10, 10)$.

2. Die *Basistransformationsmatrix* von B nach C ist $\mathbf{A}$, die Matrix, deren Spalten die Koordinaten der Elemente der Basis B relativ zur Basis C sind. Es ist also

   $(\mathbf{v})_C = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v})_B$, also

   $$(\mathbf{v})_C = \begin{pmatrix} \frac{5}{10} & -\frac{5}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Umgekehrt ist die *Basistransformationsmatrix* von C nach B die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, deren Spalten die Koordinaten der Elemente der Basis C relativ zur Basis B sind. Es ist also

   $(\mathbf{v})_B = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{v})_C$, also

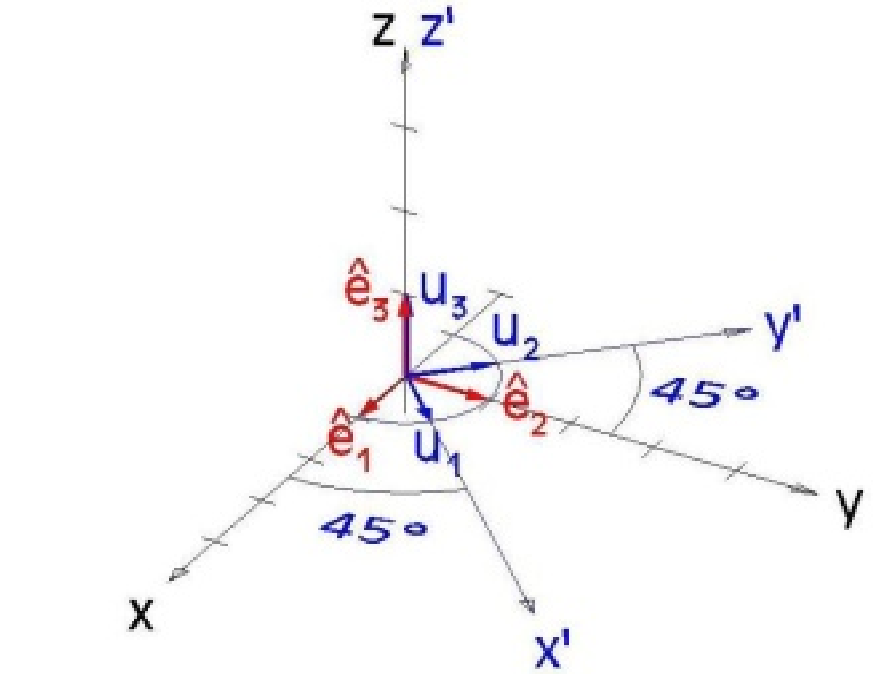
   $$(\mathbf{v})_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

0.1.1 Orthonormale Basen

Eine Menge von Vektoren heißt *orthogonale Menge*, wenn je zwei verschiedene Vektoren in der Menge orthogonal sind. Eine orthogonale Menge, in der jeder Vektor die Norm (Länge) 1 hat, heißt *orthonormal.*

In einem rechtsdrehenden kartesischen Koordinatensystem betrachten wir zwei Basen für $\mathbf{R}^3$ (siehe Abb. 0.1); die Standardbasis $B = (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ und eine zweite orthonormale Basis $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = ((\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0), (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1))$.

Abbildung 0.1: Orthonormale Basen



Die Matrix $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, also $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$ der Basis C sind, ist die *Basistransformationsmatrix* von C nach B.

Das geht hier deshalb so glatt, da die Elemente der Basis C relativ zu den Elementen der Basis B vorliegen. Haben wir zwei beliebige orthonormale Basen, muß man erst die Elemente der einen Basis durch die der anderen Basis ausdrücken. Wir wollen deshalb hier den allgemeinen Weg wählen und dafür die Elemente der Standardbasis B relativ zur Basis C finden.

Für jedes $\hat{\mathbf{e}}_i$ müssen wir das linieare Gleichungssystem $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x} = \hat{\mathbf{e}}_i$ lösen.

Wir wenden hier das Verfahren der Gauss'schen Elimination an, wie im Kapitel *lineare Gleichungssysteme* beschrieben, erweitern die Matrix aber gleich um alle drei $\hat{\mathbf{e}}_i$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1\&2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_1 \to \sqrt{2} \cdot Z_1$,

(2) $Z_2 \to \sqrt{2} \cdot Z_2$,

(3) $Z_2 \to Z_2 - Z_1$,

(4) $Z_2 \to \frac{1}{2} \cdot Z_2$,

(5) $Z_1 \to Z_1 + Z_2$.

Die rechten Spalten der umgeformten erweiterten Matrix enthalten die Koordinaten der drei $\hat{\mathbf{e}}_i$ relativ zur Basis C. Diese drei Spaltenvektoren bilden deshalb die *Basistransformationsmatrix* von B nach C. Diese Matrix ist aber nichts anderes als die Inverse $\mathbf{T}$ von $\mathbf{T}^{-1}$, da wir in unserer Suche nach den $\hat{\mathbf{e}}_i$ zur Basis C, de facto $\mathbf{T}^{-1}$ invertiert haben.

Gleichzeitig stellen wir fest, dass $\mathbf{T}^{-1}$ gleich $\mathbf{T}^t$ ist. Das ist kein Zufall, sondern ist charakteristisch für Basistransformationen zwischen orthonormalen Basen.

0.1.2 Orthogonale Matrizen

Eine quadratische $(n \times n)$-Matrix wie im letzten Abschnitt, mit der Eigenschaft $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ nennt man *orthogonale Matrix*. Die Zeilen und die Spalten einer orthogonalen Matrix bilden orthonormale Mengen in $\mathbf{R}^n$.

0.1.3 Drehung des kartesischen Koordinatensystems

Noch etwas fällt uns auf, bei der Basistransformation zwischen orthonormalen Basen. Da die Basisvektoren die Norm (Länge) 1 haben, sind ihre Komponenten gleich den Richtungscosinus. Die Transformation von einer **orthonormalen** Basis zu einer anderen **orthonormalen** Basis, ist dasselbe wie eine entsprechende Drehung des kartesischen Koordinatensystems (siehe Abb. 0.1) um den Ursprung O.

Berachten wir die Matrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und vegleichen mit Abb. 0.1.

Die Zeilen von $\mathbf{T}$ sind von oben nach unten die Richtungscosinus von $\mathbf{x}^{'}, \mathbf{y}^{'}, \mathbf{z}^{'}$ relativ zu den Achsen $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

Die Spalten von $\mathbf{T}$ sind von links nach rechts die Richtungscosinus von $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ relativ zu den Achsen $\mathbf{x}^{'}, \mathbf{y}^{'}, \mathbf{z}^{'}$.