0.1 Lineare Gleichungssysteme

Angenommen unsere Matrix $\mathbf{A}$ aus den letzten Beispielen, ist die Matrix der Koeffizienten des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 + -2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 8, \end{aligned} \tag{0.1}$$

also $\mathbf{AX} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, oder $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Wir kennen die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$. Wir können deshalb die letzte Gleichung mit $\mathbf{A}^{-1}$ von links multiplizieren und erhalten

$$\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}B}, \tag{0.2}$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{104} & \frac{27}{104} & \frac{-34}{104} \\ \frac{-20}{104} & \frac{28}{104} & \frac{-16}{104} \\ \frac{11}{104} & \frac{-5}{104} & \frac{14}{104} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{293}{104} \\ -\frac{196}{104} \\ \frac{139}{104} \end{pmatrix}.$$

Die Cramer'sche Regel

Nehmen wir nun an, $\mathbf{A}$ sei eine beliebige (z, z)-Matrix mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, sodaß die Inverse existiert. Wir erhalten sie z.B. aus Gleichung **??**. Setzten wir den dort gefundenen Ausdruck für $\mathbf{A}^{-1}$ in Gleichung 0.2 ein, erhalten wir

$$\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}B} = \tfrac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})\mathbf{B} = \tfrac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{z1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1z} & C_{2z} & \cdots & C_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_z \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\mathbf{X} = \tfrac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} b_1C_{11} & b_2C_{21} & \dots & b_zC_{z1} \\ b_1C_{12} & b_2C_{22} & \dots & b_zC_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1C_{1z} & b_2C_{2z} & \cdots & b_zC_{zz} \end{pmatrix}.$$

Die j-te Zeile von $\mathbf{X}$ ist deshalb gegeben durch

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_z C_{zj} +}{\det(\mathbf{A})}. \tag{0.3}$$

Sei nun $\mathbf{A_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \dots & a_{1z} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} \dots & a_{2z} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{z1} & a_{z2} & \dots & a_{zj-1} & b_z & a_{zj+1} \dots & a_{zz} \end{pmatrix}$,

dann unterscheidet sich $\mathbf{A_j}$ von $\mathbf{A}$ nur in der j-ten Spalte. Die Co-Faktoren der Komponenten $b_1, b_2, \dots, b_z$ von $\mathbf{A_j}$ sind dieselben wie die Co-Faktoren der entsprechenden Komponenten in der j-ten Spalte von $\mathbf{A}$. Somit ist die Co-Faktorentwicklung von $\det(\mathbf{A_j})$ nach der j-ten Spalte gegeben durch $\det(\mathbf{A_j}) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \ldots + b_z C_{zj}$.

Durch Einsetzen in Gleichung 0.3 erhalten wir

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A_j})}{\det(\mathbf{A})}. \tag{0.4}$$

Was wir soeben hergeleitet haben, ist als Cramer'sche[1] Regel bekannt.

Wir kehren zu unserem Beispiel zurück und benutzen die Formeln von Cramer zur Berechnung von $\mathbf{X}$:

$\det(\mathbf{A_1}) = b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + b_3 C_{3j} = 2 \cdot 3 + (-1)27 + 8(-34) = -293,$

$\det(\mathbf{A_2}) = b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + b_3 C_{32} = 2(-20) + (-1)28 + 8(-16) = -196,$

$\det(\mathbf{A_3}) = b_1 C_{13} + b_2 C_{23} + b_3 C_{33} = 2 \cdot 11 + (-1)(-5) + 8 \cdot 14 = 139.$

Da $\det(\mathbf{A}) = 104$, ergeben sich die x_j zu

$x_1 = \frac{-293}{104}$, $x_2 = \frac{-196}{104}$ und $x_3 = \frac{139}{104}$.

[1] Gabriel Cramer, 1704 - 1752