Fünfte Woche, 27. April, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

Nach Gleichung **??** ist aber das Quadrat des Abstands der Punkte A und B gegeben durch

$$(AB)^2 = (c_1^2 - c_1^1)^2 + (c_2^2 - c_2^1)^2 + (c_3^2 - c_3^1)^2$$

(die Koordinaten der Einsvektoren sind ihre Richtungscosinus)

$= (c_1^2)^2 - 2c_1^2c_1^1 + (c_1^1)^2 + (c_2^2)^2 - 2c_2^2c_2^1 + (c_2^1)^2 + (c_3^2)^2 - 2c_3^2c_3^1 + (c_3^1)^2$

$= [(c_1^1)^2 + (c_2^1)^2 + (c_3^1)^2] + [(c_1^2)^2 + (c_2^2)^2 + (c_3^2)^2] - 2(c_1^1c_1^2 + c_2^1c_2^2 + c_3^1c_3^2).$

Da aber nach (**??**)

$[(c_1^1)^2 + (c_2^1)^2 + (c_3^1)^2] = 1$ und $[(c_1^2)^2 + (c_2^2)^2 + (c_3^2)^2] = 1$

ist, erhalten wir durch Einsetzen von $(AB)^2$ in (**??**),

$$\cos\theta = (c_1^1c_1^2 + c_2^1c_2^2 + c_3^1c_3^2). \tag{0.1}$$

Da $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$ ist, können wir in Abb. **??** sowohl den spitzen als auch den stumpfen Winkel als θ bezeichnen. Egal wird es natürlich erst recht, wenn die Winkel $90°$ sind. Die Ortsvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ schließen einen rechten Winkel ein, genau dann, wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$ oder $\theta = \frac{3\pi}{2}$, also genau dann, wenn $\cos\theta = 0$ ist.

Damit haben wir eine Bedingung dafür, daß zwei Ortsvektoren oder auch zwei Geraden durch den Ursprung senkrecht zueinander stehen, nämlich genau dann, wenn

$$\cos\theta = (c_1^1c_1^2 + c_2^1c_2^2 + c_3^1c_3^2) = 0. \tag{0.2}$$

0.1 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Wenn man in Gleichung 0.1 beide Seiten mit $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ multipliziert, erhält man

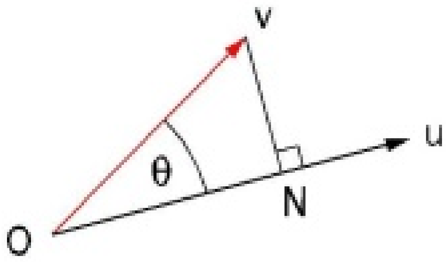
$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|(c_1^1c_1^2 + c_2^1c_2^2 + c_3^1c_3^2) = uv(c_1^1c_1^2 + c_2^1c_2^2 + c_3^1c_3^2)$, also

$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (uc_1^1vc_1^2 + uc_2^1vc_2^2 + uc_3^1vc_3^2) = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$. Wir bezeichnen

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \tag{0.3}$$

als das *Skalare Produkt*, das *Innere Produkt* oder den *metrischen Tensor* der Vektoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ und $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Die erstere Bezeichnung bezieht sich auf das Produkt, das ein Skalar ist. Andere Schreibweisen sind $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ oder $\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle$. Zusammen mit dem Inneren Produkt ist der Vektorraum $\mathbf{R}^3$ ein euklidischer Raum.

Abbildung 0.1: Orthogonale Projektion von $\mathbf{v}$ auf die Wirkungslinie von $\mathbf{u}$



0.2 Die orthogonale Projektion eines Vektors

Gegeben sei die Wirkungslinie eines Vektors $\mathbf{u}$ durch ihre Richtungscosinus (c_1, c_2, c_3) und ein Vektor durch seine Komponenten $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Nach Gleichung **??** sind die Richtungscosinus von $\mathbf{v}$ gegeben durch $(\frac{v_1}{v}, \frac{v_2}{v}, \frac{v_3}{v})$, mit $v = \|\mathbf{v}\|$. Der Winkel zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ist nach Gleichung 0.1 gegeben durch

$$\cos\theta = \frac{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3}{v}. \tag{0.4}$$

Die othonormale Projektion von $\mathbf{v}$ auf $\mathbf{u}$ oder dessen Verlängerung (siehe Abb. 0.1) ist aber gegeben durch $ON = v\cos\theta$. Wir haben damit gefunden,

Die orthogonale Projektion eines Vektors (v_1, v_2, v_3)
auf eine Gerade mit den Richtungscosinus (c_1, c_2, c_3) *ist gegeben durch*

$$\|\mathbf{v}\|\cos\theta = (v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3). \tag{0.5}$$

0.3 Übungen

1. Von einem Vektor $\mathbf{A}$ sei die Länge gegeben und die Winkel α, β, γ die er mit den Koordinatenachsen Ox, Oy, Oz einschliesst. Man finde seine Komponenten.

2. Von einem Vektor $\mathbf{r}$ seien die $\angle\ \alpha$ und β gegeben. Man finde den $\angle\ \gamma$.

3. Welche $\angle$ mit den Koordinatenachsen bildet der Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, wobei $\mathbf{a} = -2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} + 2\sqrt{2}\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ und $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$?

4. Wie heißt der Einsvektor von $\vec{u} = \frac{22}{30}\hat{e}_1 - \frac{4}{6}\hat{e}_2 + \frac{4}{30}\hat{e}_3$?

5. Man bestimme den Winkel zwischen zwei Raumdiagonalen eines Würfels.

6. Für einen Ortvektor $\overline{B}$ gilt $\alpha = 135°$, $\beta = 60°$, γ ist stumpf und $\mathbf{a}_3 = -2$. Man beschreibe $\overline{B}$; wie lang ist er?