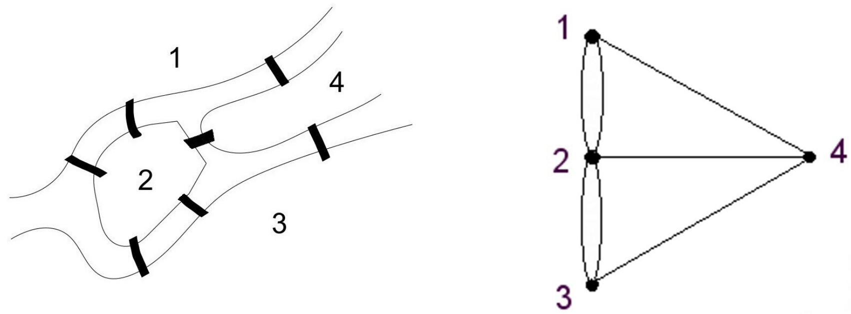


Abbildung 1: Euler's Brückenproblem und ein dazu passender Graph

# 1 Grundlagen der Graphentheorie

Mit einer Fragestellung über die Überquerung der Brücken von Königsberg, etablierte Leonhard Euler (1707 - 1783) die mathematische Disziplin der Graphentheorie. Die Elemente eines Graphen sind Knoten (auf Englisch: vertices) und Kanten (auf Englisch: edges). Der Graph rechts in Abbildung 1 enthält vier Knoten, welche die vier Gebiete Festland repräsentieren und sieben Kanten, welche die sieben Brücken über die Pregel repräsentieren.

**Definition A.1** Ein *gerichteter Graph* oder *Digraph* $G$ ist ein geordnetes Paar $(V, E)$ einer endlichen oder abzählbaren Menge $V$ von Knoten und einer Menge $E$ von Kanten.
Die $Inzidenzfunktion$: $E \to (V \times V)$ ordnet jeder Kante $e \in E$ ein geordnetes Paar $(u, v) \in (V \times V)$ zu. Das Paar $e \equiv (u, v)$ wird *gerichtete Kante* genannt. Wir sagen $e$ und $u$ sind *inzident* und $e$ und $v$ sind *inzident*.
Wir nennen $G$ endlich, wenn $V$ und $E$ endliche Mengen sind.
Die beiden *Endpunkte* einer gerichteten Kante $(u, v)$ werden *Startpunkt* $p_{init} := u$ und *Zielpunkt* $p_{term} := v$ genannt. In einer grafischen Darstellung wird $p_{term}$ mit einer Pfeilspitze versehen.
Zwei Knoten heißen *benachbart* oder *adjazent* $(\sim)$, wenn es eine Kante gibt, die mit beiden inzidiert.
Zwei Kanten heißen *benachbart* oder *adjazent*, wenn es einen Knoten gibt, der mit beiden inzidiert.
Eine Kante mit identischen Endpunkten heißt *Schlinge*.

**Definition A.2** Ist jede Kante in einem Graphen $G$ ungerichtet, also von der Form $\{u, v\}$, dann ist $G$ ein *ungerichteter Graph*.

**Definition A.3** Ein Graph wird *schlicht* genannt, wenn $u, v \in V$ impliziert

(S1) höchstens eine der folgenden Kanten $e = (u, v)$, $\bar{e} = (v, u)$ oder $f = \{u, v\}$ ist ein Element von $E$ (keine *Mehrfachkanten*) und

(S2) ein Paar der Form $(v, v)$ oder $\{v, v\}$ ist kein Element von $E$ (keine *Schlingen*).

**Definition A.4** Ein *orientierter Graph* ist ein schlichter gerichteter Graph.

**Definition A.5** Ein schlichter ungerichteter Graph ist ein orientierter Graph, bei dem die Orientierungen der Kanten aufgehoben ist, dessen jede Kante also von der Form $\{u, v\}$ ist.

Andererseits erhält man einen orientierten Graphen, indem man jeder Kante eines schlichten unorientierten Graphen eine Richtung zuordnet. Da man bei jeder Kante die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten hat, hat man isgesamt also $2^{|\mathrm{E}|}$ verschiedene Möglichkeiten. Somit gibt es $2^{|\mathrm{E}|}$ verschieden orientierte Graphen über einem bestimmten schlichten unorientierten Graphen.

**Knotengrade A.6** Der *Grad* $d(u)$ eines Knoten $u$ is gleich der Anzahl der Kanten $e$, mit denen er inzidiert. Schlingen werden doppelt gezählt. Ein Knoten mit Grad 0 wird *isolierter Knoten* genannt. Bei einem gerichteten Graphen kann man zudem für jeden Knoten $u$ zwischen seinem *Ausgangsgrad* $d^+(u) = |\{v|(u, v) \in E\}|$ und seinem *Eingangsgrad* $d^-(u) = |\{v|(v, u) \in E\}|$ unterscheiden, also $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$.
Damit ist $d^+(u)$ gleich der Anzahl der gerichteten Kanten $e \in E$ mit Anfangsknoten $u$. Da jede gerichtete Kante genau einen Anfangsknoten hat, ist diese Zahl gleich $|E|$. In gleicher Weise ist $d^-(u) = |E|$, da jede gerichtete Kante genau einen Endknoten hat. Es gilt deshalb:

$$\sum_{u \in V} d^+(u) = \sum_{u \in V} d^-(u) = |E|.$$

**Lemma A.7** (**Handshaking Lemma**) Für jeden Graph $G = (V, E)$:

$$\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|.$$

**Korollar A.8** Jeder Graph $G = (V, E)$ hat eine gerade Anzahl von Knoten mit ungeradem Grad $d(u)$.

**Beweis** Wir haben $V = A \cup B$, wobei $A = \{v \in V \mid d(v) \text{ ist gerade}\}$ und $B = \{v \in V \mid d(v) \text{ ist ungerade}\}$. Mit Lemma A.7 und den Tatsachen, dass ein Vielfaches einer geraden Zahl gerade ist und dass die Summe gerader Zahlen gerade ist, ergibt sich, dass die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade sein muss.

$$\underbrace{2|E|}_{\text{gerade}} - \underbrace{\sum_{u \in A} d(u)}_{\text{gerade}} = \underbrace{\sum_{u \in B} \underbrace{d(u)}_{\text{ungerade}}}_{\text{ergibt sich als gerade}}$$

.