0.1 Einstein'sche Summenkonvention

Kürzere Gleichungen erhält man durch die Verwendung der Index-Schreibweise für die Komponenten von Vektoren und Tensoren, wie wir im Kapitel über Basen schon gesehen haben.

Verwendet man im vorigen Abschnitt $(x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'})$ anstatt $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ und (x_1, x_2, x_3) anstatt $(x, y, z,)$ dann werden die Gleichung **??** und **??** zu

$$\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1^{'} + c_{21}x_2^{'} + c_{31}x_3^{'} \\ c_{12}x_1^{'} + c_{22}x_2^{'} + c_{32}x_3^{'} \\ c_{13}x_1^{'} + c_{23}x_2^{'} + c_{33}x_3^{'} \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

oder

$$x_i^{'} = \sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_j, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{0.3}$$

und

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ji}x_j, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{0.4}$$

oder noch kürzer

$$x_i^{'} = c_{ij}x_j \tag{0.5}$$

und

$$x_i = c_{ji}x_j. \tag{0.6}$$

Die Summenkonvention besagt:

1. Tritt in einem Ausdruck ein Index zweimal auf, wird der Ausdruck über alle vorgesehenen Werte des Indexes summiert.

2. Tritt ein Index in einem Ausdruck nur einmal auf, wie z.B. i in den Gleichungen 0.5 und 0.6, gilt die betreffende Gleichung für alle Werte, die der Index durchlaufen kann.

Albert Einstein[1] hat in einem Brief an einen Freund die nicht ernst gemeinte Bemerkung gemacht, dass er eine große Entdeckung in der Mathematik gemacht habe. Eine Anekdote erzählt, dass es der Schriftsetzer eines Verlages war, der die Konvention anregte.

[1] 1879 - 1955

Unter Verwendung des Kroneckersymbols (siehe Abschnitt **??**) und der Einstein'schen Summenkonvention, werden die Gleichungen **??** und **??** zu

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i^{'}, \hat{\mathbf{e}}_j^{'} \rangle = c_{ik} c_{jk} = \delta_{ij}, \tag{0.7}$$

und die Gleichungen **??** und **??** zu

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = c_{ki} c_{kj} = \delta_{ij}. \tag{0.8}$$

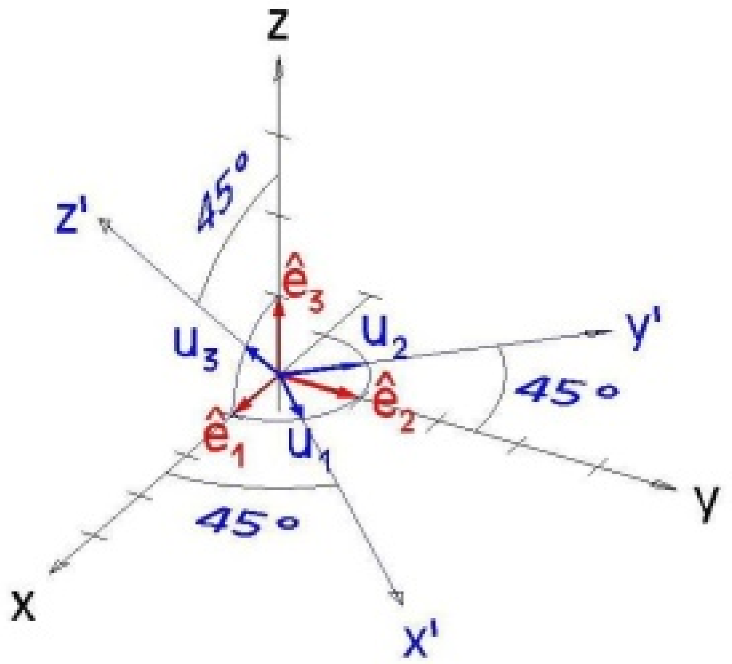
Gleichung 0.7 stellt die *Orthonormalitätsbedingungen* für die Richtungscosinus dar und besteht in expandierter Form aus neun Gleichungen.

Gleichung 0.8 ist die alternative Form der Orthonormalitätsbedingungen.

0.2 Übungen

1. In dem kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$ in Abb. 0.1 sei der Vektor $\mathbf{v} = (10, 10, 10)$ gegeben. Man finde seine Koordinaten im System $Ox^{'}y^{'}z^{'}$.

Abbildung 0.1: Basistransformation



2. In dem kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$ in Abb. 0.2 sei der Vektor $\mathbf{v} = (10, 10, 10)$ gegeben. Man finde seine Koordinaten im System $Ox^{'}y^{'}z^{'}$.

Abbildung 0.2: Basistransformation