Dreizehnte Woche, 22. Juni, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Besprechung der Übungen

1. Da $\det(\mathbf{C}) = 0$, ist der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbf{C}$ kleiner als 3. Das System hat deshalb keine eindeutige Lösung. Es gibt entweder keine Lösung oder unendlich viele. Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix $(C|D)$ und bringen diese durch elementare Zeilenumformungen in Staffelform.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ -2 & -4 & 6 & 8 \end{array}\right] \stackrel{(1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & 6 & 8 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(2\&3)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 6 \end{array}\right] \stackrel{(4)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 20 & 6 \end{array}\right]$$

$$\stackrel{(5)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49}{4} \end{array}\right]$$

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_1 \longleftrightarrow Z_2$

(2) $Z_2 \rightarrow Z_2 - 3Z_1$,

(3) $Z_3 \rightarrow Z_3 + 2Z_1$,

(4) $Z_2 \rightarrow -\frac{1}{16}Z_2$,

(5) $Z_3 \rightarrow Z_3 - 20Z_2$.

Da $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \neq \frac{49}{4}$, hat dieses System keine Lösung.

2. Da $\det(\mathbf{F}) = 0$, ist der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbf{F}$ kleiner als 3. Das System hat deshalb keine eindeutige Lösung. Es gibt entweder keine Lösung oder unendlich viele. Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix $(C|D)$ und bringen diese durch elementare Zeilenumformungen in Staffelform.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(1\&2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(3\&4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Umformungen im Einzelnen:

(1) $Z_2 \to Z_2 - 2Z_1$,

(2) $Z_3 \to Z_3 - 2Z_1$,

(3) $Z_2 \to \frac{1}{3}Z_2$,

(4) $Z_3 \to \frac{1}{9}Z_3$,

(5) $Z_3 \to Z_3 - Z_2$.

Dieses System hat unendlich viele Lösungen. Wir setzen z.B. $x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}$. Dann folgt $x_2 = \alpha$ und $x_1 = 1$. Jeder Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ ist eine Lösung dieses linearen Gleichungssystem.