Dritte Woche, 13. April, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.0.1 Besprechung der Übungen

1. Einige Beispiele für Vektorräume: Alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen ($\mathbf{R}^2$); die Menge der reellen Zahlen $\mathbf{R}$ selbst; alle n-Tupel der Form

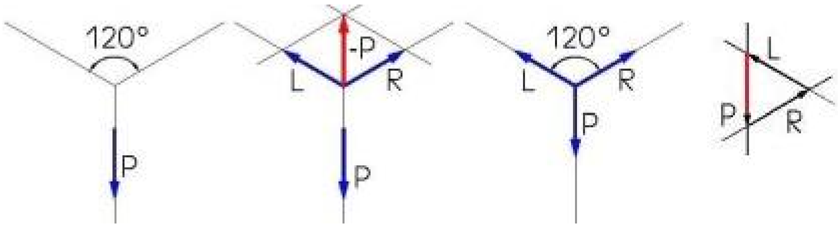
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

mit n eine beliebige positive ganze Zahl ($\mathbf{R}^n$); alle beschränkten oder alle stetigen oder alle differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ in die reellen Zahlen; ... (Man überprüfe anhand der VR-Axiome).

2. Der Nullvektor allein. Das ist sozusagen die Minimalbesetzung. (Man überprüfe anhand der VR-Axiome).

3. Vektoren die in einer Ebene liegen heißen *komplanar*. Sind drei komplanare Vektoren gegeben, kann man einen davon in die Richtungen der beiden anderen zerlegen. Der Vektor **P** steht für unsere Last, physikalisch eine Kraft. Die schrägen Seile

Abbildung 0.1: Zerlegung eines Vektors in Komponenten



geben die Richtungen vor, in die **-P**, die Gegenkraft, zerlegt werden muss. Wir zeichnen dazu parallele Hilfslinien zu den gewünschten Kraftrichtungen durch den Endpunkt von **-P**. Dem resultierenden Parallelogramm können wir die Beträge der Kräfte **L** und **R** entnehmen. So wie **P** und **-P** im Gleichgewicht sind, sind es auch **L**, **P** und **R**. Ihre Summe ergibt den Nullvektor. ($\mathbf{P} + (\text{-}\mathbf{P}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{R} + \mathbf{L} = \text{-}\mathbf{P}$, $\mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$). Ferner erhalten wir $\|\mathbf{P}\| = \|\mathbf{L}\| = \|\mathbf{R}\| = 100$.

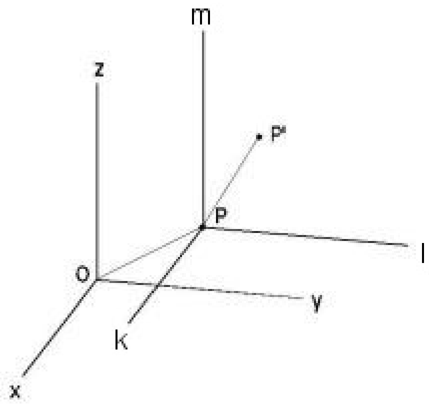
4. Die Vektoren $3\underline{v} = (21, -9, -15)$ und $-3\underline{v} = (-21, 9, 15)$ sind Beispiele für zwei Vektoren die jeweils dreimal so lang sind wie $\underline{v} = (7, -3, -5)$.

0.1 Der Abstand zweier Punkte

Angenommen in unserem Koordinatensystem $Oxyz$ kennen wir in einem bestimmten Augenblick die Koordinaten $\mathbf{P}(x, y, z)$ und **P'**(x', y', z'). **P** sei am Mond und **P'** eine Mondfähre, die den Mond umkreist. Wir interessieren uns für den momentanen Abstand der Fähre zum Mond. Wir denken uns in $\mathbf{P}(x, y, z)$ ein Koordinatensystem

Abbildung 0.2: Basen

Abbildung 0.3: Abstand zweier Punkte



Pklm, parallelverschoben zu *Oxyz*. Nach Abb. 0.3 haben wir $\overline{OP} + \overline{PP'} = \overline{OP'}$ oder $\overline{PP'} = \overline{OP'} - \overline{OP} = (x', y', z') - (x, y, z) = (x' - x, y' - y, z' - z)$. Nach Gleichung **??** erhalten wir für den den momentanen Abstand PP' der Fähre vom Mond, bzw. allgemein für den Abstand zweier Punkte:

$$PP' = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \tag{0.1}$$

Der Mann im Mond würde sagen, daß die Fähre in seinem System $Pklm$ die Koordinaten $P'(k, l, m)$ hat und schreiben $PP' = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$. Da hätte er völlig recht, denn es ist ja $(k, l, m) = (x' - x, y' - y, z' - z)$.

0.2 Eine Basis für unser Rechnen im Raum

Sehen wir uns Abb. 0.1 in Abschnitt 2.3.4 an. Nehmen wir an, der Knotenpunkt der drei Seile sei im Ursprung eines Koordinatensystems, die x-Achse gehe waagrecht nach rechts, die y-Achse senkrecht nach oben. Alle beteiligten Vektoren sind komplanar, das Problem ist also zweidimensional. Bringen wir trotzdem die dritte Dimension ins Spiel, dann zeigt die z-Achse senkrecht aus dem Blatt heraus. Wir haben dann $\mathbf{P} = (0, -100, 0)$ und **-P** $= (0, 100, 0)$, also $\mathbf{P} +$ **(-P)** $= (0, -100, 0) + (0, 100, 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$. $\mathbf{0}$ ist der Nullvektor. Seine Länge $\|\mathbf{0}\|$ ist 0, seine Richtung unbestimmt. In der Ebene kann die Summe zweier Vektoren nur dann $\mathbf{0}$ ergeben, wenn der eine ein Vielfaches des anderen ist. Hier ist **-P** $= (-1)\mathbf{P}$ oder auch $\mathbf{P} = (-1)$**(-P)**. Man sagt, die Vektoren sind linear abhängig.

Weiters haben wir $\mathbf{L} = (-\sqrt{7500}, 50, 0)$ und $\mathbf{R} = (\sqrt{7500}, 50, 0)$. Somit $\mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{P} = (\sqrt{7500}, 50, 0) + (-\sqrt{7500}, 50, 0) + (0, -100, 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$.

Die Bedingung dafür, daß drei Vektoren **a**, **b**, **c** komplanar sind, kann durch die *Vektorgleichung*

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0}, \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R} \tag{0.2}$$

ausgedrückt werden.

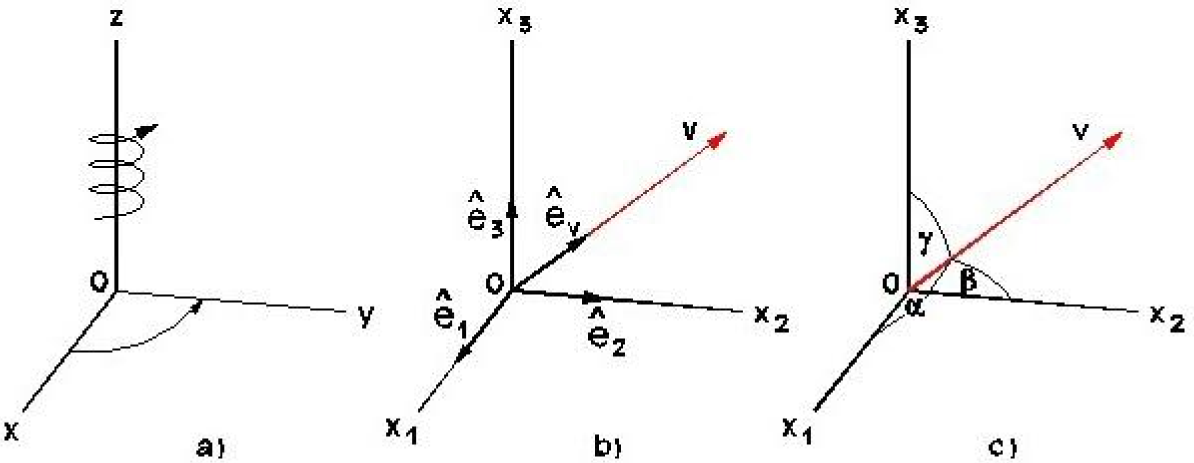
0.2.1 Einheitsvektoren (Einsvektoren)

Ein einzelner Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ kann als Basis für den eindimensionalen Raum dienen. Jeder Vektor $\mathbf{a}$ der Geraden kann mit $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{v}, \ \ \lambda \in \mathbf{R}$, dargestellt werden. Vorteilhaft sind in der Regel aber Basisvektoren der Länge *eins*. Für jeden Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist der *Einsvektor* gegeben durch $\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. Damit schreibt man einen Vektor $\mathbf{a}$ der Länge λ als $\mathbf{a} = \lambda\hat{\mathbf{e}}_v$ (sihe Abb. 0.4 b)).

Da Vektoren gleicher Länge und gleicher Richtung äquivalent, also gleichwertig sind, erweisen sich *Ortsvektoren* mit dem Anfangspunkt $\mathbf{O}$, auch *Radiusvektoren* genannt, wie geschaffen als Basisvektoren.

Aus der ganzen „Kugel“ der Ortsvektoren vom Betrag 1, eignet sich jeder als Basis für eine Gerade, zwei beliebige, aber linear unabhängige, als Basis für eine Ebene und 3 beliebige, aber linear unabhängige, als Basis für den Euklidischen Raum. Nach Euklid[1] wird der Raum unserer Anschauung $\mathbf{R}^3$ auch als E^3 bezeichnet. In diesem ist, allen Gerüchten zum Trotz, Euklids Parallelenaxiom gültig und notwendig.

Abbildung 0.4: Koordinatensystem, Basis, Richtungscosinus



Im Raum E^3 ist das wichtigste Tripel von Basisvektoren gegeben durch die Einsvektoren entlang den positiven Richtungen der Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems wie in Abb. 0.4 b). Normalerweise wird ein rechtsdrehendes System verwendet (siehe Abb. 0.4 a)). Denkt man sich die x- und die y-Achse als Griff und dreht den „Griff“ in dem Sinn Ox auf dem kürzesten Weg nach Oy, dann würde eine normale rechtsgängige Schraube (oder ein Korkenzieher) in Richtung der z-Achse vorrücken. Werden zwei beliebige Achsen vertauscht, erhält man ein linksdrehendes System.

Die drei auserwählten Einsvektoren für ein kartesisches Koordinatensystem unserer Wahl, werden mit $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ oder mit $\hat{e}_1$,$\hat{e}_2$,$\hat{e}_3$ bezeichnet, wie in Abb. 0.4 b) dargestellt.

[1]Euklid, 365 - 300 v. Chr.

Für das Arbeiten mit Tensoren ist es üblich, die Achsen x,y,z mit x_1, x_2, x_3 zu bezeichnen, wie in Abb. 0.4 b) und c). Die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$ bezeichnet man dann auch mit z. B. v_1, v_2, v_3 oder v^1, v^2, v^3. Im letzten Fall sind die Hochzahlen keine Exponenten sondern Indices, die die Reihenfolge anzeigen. Ein Vektor $\mathbf{v}$ kann mit den Basis-Einsvektoren jetzt auch als *Vektorsumme* (*Linearkombination*) dargestellt werden. Hier einige Schreibweisen:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3 = v^1\hat{e}_1 + v^2\hat{e}_2 + v^3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i\hat{e}_i$$

0.3 Übungen

1. Man finde den Abstand der Punkte $(11, -1, 9)$ und $(-5, -7, 3)$.
2. Finde die Punkte, die den Abstand $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ von jeder Achse haben.
3. In einem System $Oxyz$ hat ein Punkt $\mathbf{Q}$ die Koordinaten $(1, 1, -1)$. Durch $\mathbf{Q}$ gehen Achsen m,n,o jeweils parallel zu x,y,z. In dem neuen System hat ein Punkt $\mathbf{P}$ die Koordinaten $(-1, 2, 0)$. Ermittle seine senkrechten Abstände zu den xy-, yz- und zx-Ebenen. Welche Koordinaten hat der Punkt $\mathbf{O}$ im neuen System?
4. Bestimme den Umfang des Dreiecks, dessen Ecken durch die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$. und $(0, 0, 1)$ gegeben sind.
5. Bestimme die Winkel α, β, γ welche der Ortsvektor $\mathbf{v} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$ in Abb. 0.4 c) mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen einschließt und zeige: $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.